# Una versione metrica del Teorema di Cartan-Hadamard

Candidato: Luigi Caputi Relatore: dott. Roberto Frigerio

20 luglio 2012

# Teorema di Cartan-Hadamard

**Teorema di Cartan-Hadamard (classico)**

Ogni varietà Riemanniana semplicemente connessa e completa, a curvatura sezionale non positiva è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

# Geodetiche

## Definizione

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Una geodetica tra $x$, $y \in X$ è una curva $\gamma\colon [0, L] \to X$ tale che:

- $\gamma(0) = x$;
- $\gamma(L) = y$;
- $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, L]$.

# Geodetiche

### Definizione

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Una geodetica tra $x$, $y \in X$ è una curva $\gamma\colon [0, L] \to X$ tale che:

- $\gamma(0) = x$;
- $\gamma(L) = y$;
- $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, L]$.
  In particolare, $L$ è pari a $d(x, y)$.

# Geodetiche

## Definizione

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Una geodetica tra $x$, $y \in X$ è una curva $\gamma\colon [0, L] \to X$ tale che:

- $\gamma(0) = x$;
- $\gamma(L) = y$;
- $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, L]$.
  In particolare, $L$ è pari a $d(x, y)$.

Uno spazio geodetico è uno spazio metrico in cui per ogni coppia di punti esiste una geodetica che li connette.

**Definizione (Metrica intrinseca)**

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico; la distanza $d$ è una metrica di lunghezze su $X$ se per ogni coppia di punti $x$, $y \in X$ si ha:

$$d(x,y) = \begin{cases} \inf_{c \in \Gamma} \{l(c)\} & \text{se } \Gamma \neq \emptyset \\ \infty & \text{se } \Gamma = \emptyset \end{cases}$$

dove $\Gamma$ è l'insieme delle curve rettificabili $c \colon [0,1] \to X$ di estremi $x$ e $y$, ed $l(c)$ è la lunghezza di $c$.

# Spazi di lunghezze

Se la metrica $d$ non è una metrica di lunghezze possiamo sempre costruire la mappa:

$$\begin{array}{rccc} d_l : & X \times X & \longrightarrow & [0, \infty] \\ & (x, y) & \longmapsto & \inf_{c \in \Gamma} \{ l(c) \} \end{array}$$

# Spazi di lunghezze

Se la metrica $d$ non è una metrica di lunghezze possiamo sempre costruire la mappa:

$$\begin{array}{rccc} d_l: & X \times X & \longrightarrow & [0, \infty] \\ & (x, y) & \longmapsto & \inf\limits_{c \in \Gamma} \{l(c)\} \end{array}$$

Si verifica che $d_l$ è proprio una metrica di lunghezze su $X$.

Se la metrica $d$ non è una metrica di lunghezze possiamo sempre costruire la mappa:

$$\begin{array}{cccc} d_l: & X \times X & \longrightarrow & [0, \infty] \\ & (x, y) & \longmapsto & \inf_{c \in \Gamma} \{l(c)\} \end{array}$$

Si verifica che $d_l$ è proprio una metrica di lunghezze su $X$.

**Definizione**

Uno spazio $(X, d_l)$ in cui la metrica $d_l$ è una metrica di lunghezze è detto spazio di lunghezze.

# Spazi di lunghezze

Se la metrica $d$ non è una metrica di lunghezze possiamo sempre costruire la mappa:

$$\begin{array}{rccc} d_l: & X \times X & \longrightarrow & [0, \infty] \\ & (x, y) & \longmapsto & \inf_{c \in \Gamma} \{ l(c) \} \end{array}$$

Si verifica che $d_l$ è proprio una metrica di lunghezze su $X$.

**Definizione**

Uno spazio $(X, d_l)$ in cui la metrica $d_l$ è una metrica di lunghezze è detto spazio di lunghezze.

Ogni spazio geodetico è uno spazio di lunghezze. Vale anche il viceversa?

**Teorema di Hopf-Rinow**

Sia $(X, d)$ uno spazio di lunghezze. Se $X$ è completo e localmente compatto allora:

- ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $X$ è compatto;

# Spazi di lunghezze

**Teorema di Hopf-Rinow**

Sia $(X, d)$ uno spazio di lunghezze. Se $X$ è completo e localmente compatto allora:

- ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $X$ è compatto;
- $X$ è uno spazio geodetico.

**Teorema di Hopf-Rinow**

Sia $(X, d)$ uno spazio di lunghezze. Se $X$ è completo e localmente compatto allora:

- ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $X$ è compatto;
- $X$ è uno spazio geodetico.

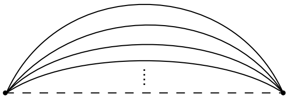
$\mathbb{R}^2$ privato di un punto è uno spazio di lunghezze non completo e non geodetico.
Esistono anche esempi di spazi di lunghezze completi, non localmente compatti che non siano geodetici.

**Teorema di Hopf-Rinow**

Sia $(X, d)$ uno spazio di lunghezze. Se $X$ è completo e localmente compatto allora:

- ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $X$ è compatto;
- $X$ è uno spazio geodetico.

$\mathbb{R}^2$ privato di un punto è uno spazio di lunghezze non completo e non geodetico.
Esistono anche esempi di spazi di lunghezze completi, non localmente compatti che non siano geodetici.



# Rivestimenti

Siano $X$ uno spazio di lunghezze e $\tilde{X}$ uno spazio di Hausdorff. Se $p\colon \tilde{X} \to X$ è un omeomorfismo locale e $c\colon [0,1] \to \tilde{X}$ un cammino, definiamo lunghezza di $c$, indicata con $l(c)$, la lunghezza di $p \circ c$:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "c"] \arrow[r, dashed, "p\circ c"'] & X \end{tikzcd}$$

Siano $X$ uno spazio di lunghezze e $\tilde{X}$ uno spazio di Hausdorff.
Se $p\colon \tilde{X} \to X$ è un omeomorfismo locale e $c\colon [0,1] \to \tilde{X}$ un cammino, definiamo lunghezza di $c$, indicata con $l(c)$, la lunghezza di $p \circ c$:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "c"] \arrow[r, dashed, "p\circ c"'] & X \end{tikzcd}$$

Possiamo allora indurre la struttura di spazio metrico ponendo:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{c \in \tilde{\Gamma}} \{ l(p \circ c) \}.$$

Siano $X$ uno spazio di lunghezze e $\tilde{X}$ uno spazio di Hausdorff. Se $p\colon \tilde{X} \to X$ è un omeomorfismo locale e $c\colon [0,1] \to \tilde{X}$ un cammino, definiamo lunghezza di $c$, indicata con $l(c)$, la lunghezza di $p \circ c$:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "c"] \arrow[r, dashed, "p\circ c"'] & X \end{tikzcd}$$

Possiamo allora indurre la struttura di spazio metrico ponendo:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{c \in \tilde{\Gamma}} \{l(p \circ c)\}.$$

Se $\tilde{X}$ è di Hausdorff, allora $\tilde{d}$ è una metrica detta metrica indotta da $p$.

Se $\tilde{d}$ è la metrica indotta da $p$ su $\tilde{X}$, allora $\tilde{d}$ è proprio una metrica di lunghezze, ed è l'unica metrica che rende

$$p\colon (\tilde{X}, \tilde{d}) \to (X, d)$$

una isometria locale.

Se $\tilde{d}$ è la metrica indotta da $p$ su $\tilde{X}$, allora $\tilde{d}$ è proprio una metrica di lunghezze, ed è l'unica metrica che rende

$$p \colon (\tilde{X}, \tilde{d}) \to (X, d)$$

una isometria locale.

**Teorema**

*Sia $p \colon \tilde{X} \to X$ un'isometria locale tra spazi di lunghezze. Se:*

1. *$X$ è connesso;*

# Rivestimenti

Se $\tilde{d}$ è la metrica indotta da $p$ su $\tilde{X}$, allora $\tilde{d}$ è proprio una metrica di lunghezze, ed è l'unica metrica che rende

$$p\colon (\tilde{X}, \tilde{d}) \to (X, d)$$

una isometria locale.

**Teorema**

*Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un'isometria locale tra spazi di lunghezze. Se:*

1. *$X$ è connesso;*
2. *$X$ è localmente unicamente geodetico e le geodetiche in $X$ variano localmente con continuità rispetto agli estremi;*

# Rivestimenti

Se $\tilde{d}$ è la metrica indotta da $p$ su $\tilde{X}$, allora $\tilde{d}$ è proprio una metrica di lunghezze, ed è l'unica metrica che rende

$$p\colon (\tilde{X}, \tilde{d}) \to (X, d)$$

una isometria locale.

**Teorema**

*Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un'isometria locale tra spazi di lunghezze. Se:*

1. *$X$ è connesso;*
2. *$X$ è localmente unicamente geodetico e le geodetiche in $X$ variano localmente con continuità rispetto agli estremi;*
3. *$\tilde{X}$ è completo;*

Se $\tilde{d}$ è la metrica indotta da $p$ su $\tilde{X}$, allora $\tilde{d}$ è proprio una metrica di lunghezze, ed è l'unica metrica che rende

$$p\colon (\tilde{X}, \tilde{d}) \to (X, d)$$

una isometria locale.

**Teorema**

*Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un'isometria locale tra spazi di lunghezze. Se:*

1. *$X$ è connesso;*
2. *$X$ è localmente unicamente geodetico e le geodetiche in $X$ variano localmente con continuità rispetto agli estremi;*
3. *$\tilde{X}$ è completo;*

*allora $p$ è un rivestimento.*

Se $\tilde{d}$ è la metrica indotta da $p$ su $\tilde{X}$, allora $\tilde{d}$ è proprio una metrica di lunghezze, ed è l'unica metrica che rende

$$p\colon (\tilde{X}, \tilde{d}) \to (X, d)$$

una isometria locale.

**Teorema**

*Sia $p\colon \tilde{X} \to X$ un'isometria locale tra spazi di lunghezze. Se:*

1. *$X$ è connesso;*
2. *$X$ è localmente unicamente geodetico e le geodetiche in $X$ variano localmente con continuità rispetto agli estremi;*
3. *$\tilde{X}$ è completo;*

*allora $p$ è un rivestimento.*

I risultati sullo spazio $\tilde{X}$ ottenuti sono gli stessi anche nel caso in cui $X$ sia solo localmente uno spazio di lunghezze.

**Definizione**

Diciamo che la metrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ su $X$ è convessa se $X$ è uno spazio geodetico e per ogni coppia di geodetiche $\gamma_1$, $\gamma_2$, definite su $[0, a]$, $[0, b]$ e tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, si ha

$$d(\gamma_1(ta), \gamma_2(tb)) \leq td(\gamma_1(a), \gamma_2(b))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.

# Convessità

**Definizione**

Diciamo che la metrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ su $X$ è convessa se $X$ è uno spazio geodetico e per ogni coppia di geodetiche $\gamma_1$, $\gamma_2$, definite su $[0, a]$, $[0, b]$ e tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, si ha

$$d(\gamma_1(ta), \gamma_2(tb)) \leq td(\gamma_1(a), \gamma_2(b))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.

Se $X$ è uno spazio metrico in cui la distanza è una funzione convessa, allora $X$ è:

- unicamente geodetico;

# Convessità

## Definizione

Diciamo che la metrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ su $X$ è convessa se $X$ è uno spazio geodetico e per ogni coppia di geodetiche $\gamma_1$, $\gamma_2$, definite su $[0, a]$, $[0, b]$ e tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, si ha

$$d(\gamma_1(ta), \gamma_2(tb)) \leq td(\gamma_1(a), \gamma_2(b))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.

Se $X$ è uno spazio metrico in cui la distanza è una funzione convessa, allora $X$ è:

- unicamente geodetico;
- le geodetiche variano con continuità rispetto agli estremi;

### Definizione

Diciamo che la metrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ su $X$ è convessa se $X$ è uno spazio geodetico e per ogni coppia di geodetiche $\gamma_1$, $\gamma_2$, definite su $[0, a]$, $[0, b]$ e tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, si ha

$$d(\gamma_1(ta), \gamma_2(tb)) \leq td(\gamma_1(a), \gamma_2(b))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.

Se $X$ è uno spazio metrico in cui la distanza è una funzione convessa, allora $X$ è:

- unicamente geodetico;
- le geodetiche variano con continuità rispetto agli estremi;
- è contraibile.

**Teorema di Cartan-Hadamard (parte 1)**

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico connesso e completo. Se la metrica $d$ è localmente convessa allora:

- il rivestimento universale $\tilde{X}$ è contraibile;

**Teorema di Cartan-Hadamard (parte 1)**

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico connesso e completo. Se la metrica $d$ è localmente convessa allora:

- il rivestimento universale $\tilde{X}$ è contraibile;
- la metrica di lunghezze indotta su $\tilde{X}$ è una funzione globalmente convessa.

**Teorema di Cartan-Hadamard (parte 1)**

Sia $(X, d)$ uno spazio metrico connesso e completo. Se la metrica $d$ è localmente convessa allora:

- il rivestimento universale $\tilde{X}$ è contraibile;
- la metrica di lunghezze indotta su $\tilde{X}$ è una funzione globalmente convessa.

In particolare, per ogni coppia di punti di $\tilde{X}$ esiste un unico segmento geodetico che li connette, e tali segmenti geodetici variano con continuità rispetto agli estremi.

Sia $\mathcal{G}_{x_0}$ l'insieme delle geodetiche locali $\gamma\colon [0,1] \to X$ per cui $\gamma(0) = x_0$; consideriamo la metrica:

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) = \sup_{t \in [0,1]} \{d(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))\}.$$

per ogni $\gamma$, $\tilde{\gamma}$ in $\mathcal{G}_{x_0}$.

# Mappa esponenziale

Sia $\mathcal{G}_{x_0}$ l'insieme delle geodetiche locali $\gamma\colon [0,1] \to X$ per cui $\gamma(0) = x_0$; consideriamo la metrica:

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) = \sup_{t \in [0,1]} \{d(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))\}.$$

per ogni $\gamma$, $\tilde{\gamma}$ in $\mathcal{G}_{x_0}$.

## Definizione

Chiamiamo mappa esponenziale l'applicazione:

$$\begin{array}{rccc} \exp\colon & \mathcal{G}_{x_0} & \longrightarrow & X \\ & \gamma & \longmapsto & \gamma(1) \end{array}$$

# Mappa esponenziale

**Proposizione**

*Se la metrica su $X$ è completa e localmente convessa allora:*

- $\mathcal{G}_{x_0}$ *è contraibile;*

# Mappa esponenziale

**Proposizione**

*Se la metrica su $X$ è completa e localmente convessa allora:*

- $\mathcal{G}_{x_0}$ *è contraibile;*
- $\exp\colon \mathcal{G}_{x_0} \to X$ *è un'isometria locale;*

**Proposizione**

*Se la metrica su $X$ è completa e localmente convessa allora:*

- $\mathcal{G}_{x_0}$ *è contraibile;*
- $\exp\colon \mathcal{G}_{x_0} \to X$ *è un'isometria locale;*
- *la metrica di* $\mathcal{G}_{x_0}$ *è completa.*

**Proposizione**

*Se la metrica su $X$ è completa e localmente convessa allora:*

- $\mathcal{G}_{x_0}$ *è contraibile;*
- $\exp\colon \mathcal{G}_{x_0} \to X$ *è un'isometria locale;*
- *la metrica di* $\mathcal{G}_{x_0}$ *è completa.*

Quindi la mappa esponenziale è un rivestimento.

# Mappa esponenziale

**Proposizione**

*Se la metrica su $X$ è completa e localmente convessa allora:*

- $\mathcal{G}_{x_0}$ *è contraibile;*
- $\exp\colon \mathcal{G}_{x_0} \to X$ *è un'isometria locale;*
- *la metrica di* $\mathcal{G}_{x_0}$ *è completa.*

Quindi la mappa esponenziale è un rivestimento.

**Teorema**

*La metrica su* $\mathcal{G}_{x_0}$ *è una funzione convessa.*

Siano $p$, $q$, $r \in (X, d)$; chiamiamo triangolo geodetico, e lo indichiamo con $\Delta([p, q], [q, r], [r, p])$, la scelta di tre segmenti geodetici $[p, q]$, $[q, r]$ e $[r, p]$ congiungenti i tre punti, detti vertici del triangolo geodetico.

Siano $p$, $q$, $r \in (X, d)$; chiamiamo triangolo geodetico, e lo indichiamo con $\Delta([p,q],[q,r],[r,p])$, la scelta di tre segmenti geodetici $[p,q]$, $[q,r]$ e $[r,p]$ congiungenti i tre punti, detti vertici del triangolo geodetico.

**Definizione (Triangolo di confronto)**

Un triangolo di confronto per il triangolo geodetico $\Delta([p,q],[q,r],[r,p]) \subseteq X$ è un triangolo $\bar{\Delta}([p,q],[q,r],[r,p])$ nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di vertici $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, tali che

$$d(p,q) = |\bar{p} - \bar{q}|, \quad d(q,r) = |\bar{q} - \bar{r}|, \quad d(p,r) = |\bar{p} - \bar{r}|.$$

Siano $p$, $q$, $r \in (X, d)$; chiamiamo triangolo geodetico, e lo indichiamo con $\Delta([p,q],[q,r],[r,p])$, la scelta di tre segmenti geodetici $[p,q]$, $[q,r]$ e $[r,p]$ congiungenti i tre punti, detti vertici del triangolo geodetico.

### Definizione (Triangolo di confronto)

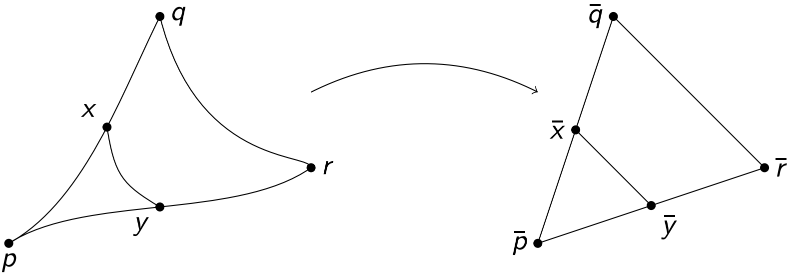
Un triangolo di confronto per il triangolo geodetico $\Delta([p,q],[q,r],[r,p]) \subseteq X$ è un triangolo $\bar{\Delta}([p,q],[q,r],[r,p])$ nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ di vertici $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, tali che

$$d(p,q) = |\bar{p} - \bar{q}|, \quad d(q,r) = |\bar{q} - \bar{r}|, \quad d(p,r) = |\bar{p} - \bar{r}|.$$

Più in generale si possono definire triangoli di confronto nello spazio metrico $\mathcal{M}^2_\kappa$,

## Definizione

Un punto $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}] \subseteq \bar{\Delta}([p, q], [q, r], [r, p])$ è detto punto di confronto per $x \in [q, r]$ se si ha $d(q, x) = d(\bar{q}, \bar{x})$. Analogamente si definiscono punti di confronto per $[p, q]$ e $[p, r]$.



### Definizione

Il triangolo geodetico $\Delta([p,q],[q,r],[r,p])$ soddisfa la condizione CAT(0) se, per ogni coppia di punti $x$, $y \in \Delta([p,q],[q,r],[r,p])$, e punti di confronto $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{\Delta}([p,q],[q,r],[r,p])$, si ha

$$d(x,y) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\bar{x},\bar{y}).$$

## Definizione

Il triangolo geodetico $\Delta([p,q],[q,r],[r,p])$ soddisfa la condizione CAT(0) se, per ogni coppia di punti $x,\ y \in \Delta([p,q],[q,r],[r,p])$, e punti di confronto $\bar{x},\ \bar{y} \in \bar{\Delta}([p,q],[q,r],[r,p])$, si ha

$$d(x,y) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\bar{x},\bar{y}).$$

Uno spazio metrico $(X,d)$ è detto spazio CAT(0) se è uno spazio geodetico e ogni triangolo geodetico in $X$ soddisfa la condizione CAT(0).

## Definizione

Il triangolo geodetico $\Delta([p,q],[q,r],[r,p])$ soddisfa la condizione CAT(0) se, per ogni coppia di punti $x$, $y \in \Delta([p,q],[q,r],[r,p])$, e punti di confronto $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{\Delta}([p,q],[q,r],[r,p])$, si ha

$$d(x,y) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\bar{x},\bar{y}).$$

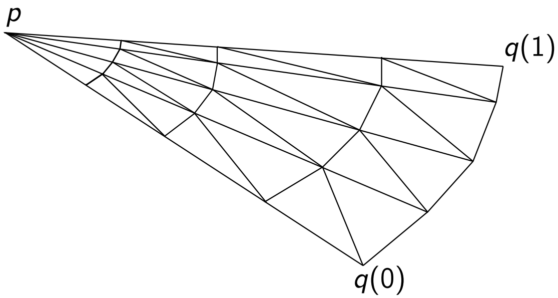
Uno spazio metrico $(X,d)$ è detto spazio CAT(0) se è uno spazio geodetico e ogni triangolo geodetico in $X$ soddisfa la condizione CAT(0).
Uno spazio metrico $X$ è detto a curvatura non positiva se è localmente CAT(0).

**Teorema di Cartan-Hadamard (parte 2)**

Sia $X$ uno spazio metrico connesso e completo.
Se $X$ è a curvatura non positiva allora il rivestimento universale $\tilde{X}$, con la metrica di lunghezze indotta, è uno spazio CAT(0).

**Proposizione (Patchwork di Alexandrov)**

*Sia $X$ uno spazio metrico unicamente geodetico a curvatura non positiva. Se tali geodetiche variano con continuità rispetto agli estremi, allora $X$ è uno spazio* CAT(0).



**Proposizione**

*Se $X$ è uno spazio* CAT(0) *allora la metrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è convessa.*

**Proposizione**

*Se $X$ è uno spazio* CAT(0) *allora la metrica* $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ *è convessa.*

Uno spazio metrico connesso e completo a curvatura non positiva

**Proposizione**

*Se $X$ è uno spazio* CAT(0) *allora la metrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è convessa.*

Uno spazio metrico connesso e completo a curvatura non positiva

$\Rightarrow$ Metrica localmente convessa

**Proposizione**

*Se $X$ è uno spazio* CAT(0) *allora la metrica* $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *è convessa.*

Uno spazio metrico connesso e completo a curvatura non positiva

$\Rightarrow$ Metrica localmente convessa

$\Rightarrow$ Rivestimento universale contraibile.

**Proposizione**

*Se $X$ è uno spazio* $\mathrm{CAT}(0)$ *allora la metrica* $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *è convessa.*

Uno spazio metrico connesso e completo a curvatura non positiva

$\Rightarrow$ Metrica localmente convessa

$\Rightarrow$ Rivestimento universale contraibile.

In particolare è unicamente geodetico, con geodetiche che variano con continuità rispetto agli estremi.

**Proposizione**

*Se $X$ è uno spazio* $\mathrm{CAT}(0)$ *allora la metrica* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *è convessa.*

Uno spazio metrico connesso e completo a curvatura non positiva

$\Rightarrow$ Metrica localmente convessa

$\Rightarrow$ Rivestimento universale contraibile.

In particolare è unicamente geodetico, con geodetiche che variano con continuità rispetto agli estremi.

$\Rightarrow$ Il rivestimento universale è uno spazio $\mathrm{CAT}(0)$.

# Applicazioni

**Proposizione**

*Ogni varietà chiusa, semplicemente connessa, non ammette metriche localmente* CAT(0).

**Proposizione**

*Ogni varietà chiusa, semplicemente connessa, non ammette metriche localmente* CAT(0).

**Esempio**

$\mathbb{S}^n$ non ammette metriche localmente CAT(0).

**Proposizione**

*Ogni varietà chiusa, semplicemente connessa, non ammette metriche localmente* CAT(0).

**Esempio**

$\mathbb{S}^n$ non ammette metriche localmente CAT(0).

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non ammette metriche localmente CAT(0).

# Applicazioni

**Teorema**

*Siano $M$ ed $N$ due varietà chiuse che ammettono una metrica localmente* CAT(0)*. Se $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$ allora* $\dim(M) = \dim(N)$.

**Teorema**

*Siano $M$ ed $N$ due varietà chiuse che ammettono una metrica localmente* $\mathrm{CAT}(0)$*. Se* $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$ *allora* $\dim(M) = \dim(N)$.

Di conseguenza, se $M$ ed $N$ sono due varietà chiuse, con $M$ localmente $\mathrm{CAT}(0)$ ed $N$ semplicemente connessa, allora $M \times N$ non ammette metriche localmente $\mathrm{CAT}(0)$.

**Proposizione**

*Siano $X$ uno spazio metrico connesso e completo, a curvatura non positiva e $x_0 \in X$ un punto fissato. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ non ha torsione.*

**Proposizione**

*Siano $X$ uno spazio metrico connesso e completo, a curvatura non positiva e $x_0 \in X$ un punto fissato. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ non ha torsione.*

Lo spazio $\mathbb{P}^{\infty}(\mathbb{R})$ ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Quindi non ammette metriche localmente CAT(0). Si osservi che ciò non deriva immediatamente dal Teorema di Cartan-Hadamard.

Grazie per l'attenzione!